8 Različne naloge

Spomnimo se: Grupoid S je množica z binarno operacijo $\circ : S \times S \to S$. Polgrupa je grupoid z asociativno operacijo. Monoid je polgrupa z enoto.

1. Razišči strukturo naslednjih grupoidov:

(a) $S = \mathbb{R}$ za operacijo $x \circ y = x + y + xy$;

(b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ za operacijo množenja matrik;

(c) $S = \mathbb{R}^3$ za operacijo vektorski produkt;

(d) $S = \mathbb{R}$ za operaciji $a *_L b = a$ in $a *_R b = b$;

(e) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ za operacijo, ki je podana s tabelo desno.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	1	5	3
3	3	5	4	2	1
4	4	1	5	3	2
5	5	3	2	1	4

[(a) komutativen monoid, imamo izomorfizem $f : (S, \circ) \to (\mathbb{R}, \cdot)$, $f(x) = x + 1$; (b) je grupa; izomorfna je grupi realnih števil za seštevanje; (c) le grupoid; (d) množica $\mathbb{R}$ je za obe operaciji polgrupa; (e) operacija ni asociativna, ima enoto 1, vsak element ima tako levi kot desni inverz, ki pa nista vedno enaka]

2. Dokaži, da sta naslednji množici z danima operacijama grupi:

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$ za operacijo množenje matrik; $[\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]$

(b) $S = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0) \right\}$ za množenje števil. $[(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}]$

3. Izračunaj rede vseh elementov v grupah $\mathbb{Z}_{20}$, S_3 in S_5.

[elementi ciklične grupe $\mathbb{Z}_{20}$, ki so tuji proti 20, imajo maksimalen možni red 20. Če nek tak element množimo z 2, dobimo element reda 10. Če ga množimo s 4, dobimo element reda 5]

4. Dana je permutacija $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$. Izračunaj a^{-1}, a^2 in a^{1000}.

[$a = (1378)(456)$, $a^{-1} = (1873)(465)$, $a^2 = (17)(38)(465)$, $a^{1000} = (456)$]

Definicija (Hom(G, H))

Naj bosta G in H dve dani grupi. Definirajmo množico $\mathrm{Hom}(G, H)$ kot množico vseh homomorfizmov iz grupe G v grupo H.

Lahko se dokaže, da če sta G in H abelski grupi, potem je množica $\mathrm{Hom}(G, H)$ tudi abelska grupa glede na operacijo saštevanja, ki je definirana z $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in G$, $\forall f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$.

5. Poišči vse homomorfizme grup:

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$; $[\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}]$

(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$; $[\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}]$

(c) $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$; $[\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \{0\}]$

(d) $\mathbb{Z}_n \to U$, kje je $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $[\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, U) \cong \mathbb{Z}_n]$

Zanimivo: Homomorfizmom iz grupe G v grupo U rečemo karakterji. Karakterji igrajo osrednjo vlogo v teorijah Fourierovih vrst, Fourierove transformacije in diskretne Fourierove transformacije. Pri posplošitvi Fourierove teorije na nekomutativne grupe karakterje nadomestimo s homomorfizmi dane grupe v matrične grupe, ki jih imenujemo tudi reprezentacije oziroma upodobitve.

6. Poišči vse avtomorfizme grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$ in $\mathbb{Z}_{10}$.

[$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\}$; grupa $\mathbb{Z}_5$ je ciklična, zato je vsak homomorfizem $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ določen s sliko generatorja, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong U(5)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{10}) \cong U(10)$]

Opomba. V splošnem so avtomorfizmi grupe Z_n v bijektivni korespondenci z elementi $U(n)$. Elementu $m \in U(n)$ pripada preslikava množenja z m po modulu n.

7. Zapiši grupno tabelo za operacijo v grupi $U(10)$. Kateri grupi je izomorfna grupa $U(10)$. [$U(10) \cong \mathbb{Z}_4$]

Spomnimo se: Če sta A in B množici, potem je $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\, b \in B\}$.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

8. Dana je grupa G z grupno tabelo levo. Kateri znani grupi je izomorfna grupa G? [$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$]

9. Opiši grupo izometrij kvadrata. [$D_4 = \{a, b \,|\, a^4 = 1,\, b^2 = 1,\, bab = a^3\}$]

10. Določi dve pravi podgrupi K grupe D_4 (tj. podgrupe ki niso $\{e\}$ in D_4) za kateri velja, da je $aK = Ka$ za vsak $a \in D_4$. [$K_1 = \{R_0, R_{180}\}$,...]

11. Pokaži, da je za poljubni $\ell \in U(n)$, funkcija $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ definirana z $\phi(x) = x\ell \bmod n$ automorfizem grupe $\mathbb{Z}_n$. [$1-1$, na, homomorfizem]

12. Poišči vse podgrupe grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{10}$ in Q, kje je Q kvaternionska grupa (Cayleyjeva tabela kvaternionske grupe Q je dana v tabeli desno; vsi simboli i, j in k so koreni števila -1, in množenje $*$ med njimi je definirano po pravilih: $i * j = k = -j * i$, $j * k = i = -k * j$ in $k * i = j = -i * k$). [$\{0\}$, $\mathbb{Z}$; $\{0\}$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\langle 5 \rangle$, $\langle 2 \rangle$; $\{0\}$, Q, $\{-1, 1\}$, $\{1, i, -1, -i\}$, $\{1, j, -1, -j\}$, $\{1, k, -1, -k\}$]

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	1	-1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	-1	1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	1	-1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	-1	1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	1	-1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	-1	1

13. Dokaži, da je vsaka grupa praštevilskega reda ciklična. [$|G| = p$, $a \in G$, $|a|$ deli $|G|$]

14. Pokaži, da je $U(8) \cong U(12)$. [napiši, Cayley-evo tabelo]

15. Poišči vse homomorfizme

(a) iz grupe $\mathbb{Z}_4$ v grupo Z_3; [$\phi(k) = 0$]

(b) iz grupe $\mathbb{Z}_8$ v grupo S_3; [red elementa $\phi(1)$ mora deliti 8, dobimo štiri možnosti]

16. Grupa G je podana s tabelo

$\circ$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	e	c	g	b	f	1	d
b	b	c	f	1	e	g	d	a
c	c	g	1	a	f	d	b	e
d	d	b	e	f	a	c	g	1
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	1	d	b	g	a	e	c
g	g	d	a	e	1	b	c	f

(a) Poišči rede vseh elementov grupe G.

(b) Ugotovi, kateri znani grupi je izomorfna grupa G in poišči eksplicitni izomorfizem.

17. Preveri ali je dana preslikava homomorfizem grup:

(a) $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $\phi(x)$ je največje celo število, manjše od x;

(b) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\phi(x) = |x|$;

(c) $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\phi(x) = 2^x$;

(d) $\phi : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_2$, $\phi(x) = x \pmod 2$;

(e) $\phi : G \to G$, G poljubna grupa in $\phi(g) = g^{-1}$;

(f) $\phi : (\mathbb{R}^{n \times n}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $\phi(A) = \det(A)$.

18. Poišči vse podgrupe grup S_3. [6]